

## Вариант 1

- Имеется 11 не обязательно различных натуральных чисел  $a_1, \dots, a_{11}$ . Докажите, что существуют целые числа  $c_1, \dots, c_{11}, c_i \in \{-1; 0; 1\}$ , не все равные нулю, такие, что число  $c_1 \cdot a_1 + \dots + c_{11} \cdot a_{11}$  делится нацело на 2047.
- Известно, что уравнение  $x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$  имеет (с учётом кратности) четыре положительных корня. Найдите  $a$  и  $b$ .
- Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует натуральное число  $N$ , делящееся нацело на  $n$ , сумма цифр которого равна  $n$ .
- Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор, в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом взято?
- Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна  $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$ ).
- Дима выбирает два различных числа из множества  $\{0, 1, 2, \dots, 2332\}$  и записывает их в на первую страницу тетради. Далее он снова выбирает два различных числа из этого же множества, прибавляет каждое из выбранных чисел к каждому числу, записанному на первой странице и записывает на вторую страницу все получившиеся суммы. (Например, если в начале были выбраны числа 2 и 3, а потом 2 и 4, то на второй странице будут записаны числа 4, 4, 5, 6, 7.) При этом, если какая-либо сумма превосходит 2332, он заменяет её остатком от деления на 2333. Затем он опять выбирает два различных числа, прибавляет их ко всем числам на второй странице и записывает все получившиеся суммы на третью страницу и т.д.
  - Найдите наименьший номер страницы  $N$ , на которой (как бы Дима числа ни выбирал) каждое из чисел  $0, 1, 2, \dots, 2332$  будет гарантированно записано хотя бы один раз?
  - Опишите все варианты выбора чисел, при которых для выполнения условия пункта 1) потребуется ровно  $N$  страниц.
- Про пятиугольник  $ABCDE$  известно, что  $AB = BC = CD = DE$ ,  $\angle B = 96^\circ$ ,  $\angle C = \angle D = 108^\circ$ . Найдите  $\angle E$ .
- Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить третью строку, умноженную на 2, то получится таблица, изображённая на рисунке под словом *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Таблица В

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Пример

1	0	6	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6